فواطر

في الرياضيات

الصف الثالث الثانوي

التفاضل

إعداد الأستاذ

أسامة سعد الله

كورس تأسيس التفاضل

① مسميات و رموز الاشتقاق

② قواعد وطرق الاشتقاق

③ أساسيات حساب المثلثات وأشتقاق الدوال المثلثية

أولاً مسميات ورموز الاشتقاق

مسميات الاشتقاق

١ المشتقة الاولى

٢ ميل المماس

٣ معدل تغير الدالة

٤ المعامل التفاضلى الاول

رموز الاشتقاق
ص = د(س)

ص'

ص(١)

$\frac{ص}{س}$

$\frac{ء}{ءس}[د(س)]$

د'(س)

ملحوظات هامة

- $\text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = د'(س)$ بدون تعويض
- $\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{د(س) - د(أ)}{س - أ} = د'(أ)$ اشتق ثم عوض

ثانياً : قواعد وطرق الاشتقاق

(أ) قواعد الاشتقاق

① $د(س) = أ$ حيث $أ$ ثابت ← فإن $د'(س) =$ صفر

① $د(س) = ٣$ ← فإن $د'(س) =$ صفر

② $د(س) = -٥$ ← فإن $د'(س) =$ صفر

③ $د(س) = \frac{٣}{٨}$ ← فإن $د'(س) =$ صفر

④ $د(س) = ٣\pi^{٤}$ ← فإن $د'(س) =$ صفر

⑤ $د(س) = ٥\sqrt{٢}$ ← فإن $د'(س) =$ صفر

---

② د(س) = س^{ن} ← فإن د'(س) = ن س$^{ن-١}$

بنزل الاس ونطرح منه واحد

① د(س) = س^{٥} ← فإن د'(س) = ٥س^{٤}

② د(س) = س^{٤} ← فإن د'(س) = ٤س^{٣}

③ د(س) = س^{٣} ← فإن د'(س) = ٣س^{٢}

---

③ د(س) = أ س^{ن} ← فإن د'(س) = أ × ن س$^{ن-١}$

نضرب الأس في المعامل ونطرح من الأس واحد

① ص = ٣س^{٢} ← ص' = ٣ × ٢س = ٦س

② ص = ٥س^{٤} ← ص' = ٥ × ٤ س^{٣} = ٢٠ س^{٣}

③ ص = ٤س^{٣} ← ص' = ٤ × ٣ س^{٢} = ١٢ س^{٢}

④ ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ← $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢س = س

⑤ ص = ٥س$^{\frac{٧}{٥}}$ ← $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ × $\frac{٧}{٥}$ س$^{\frac{٢}{٥}}$ = ٧ س$^{\frac{٢}{٥}}$

④ د(س) = ٢س ← فإن د'(س) = ٢

أمثلة

① د(س) = ٥س ← فإن ص' = ٥

② د(س) = ٣س ← فإن $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ٣

③ د(س) = $\frac{١}{٢}$س ← فإن ص$^{(١)}$ = $\frac{١}{٢}$

④ د(س) = س ← فإن د'(س) = ١

⑤ ص = π س ← فإن ص' = π

ص = $\frac{\text{س}}{٥}$

ص = $\frac{١}{٥}$س ← ص' = $\frac{١}{٥}$

امثلة

أوجد المشتقة الاولي

مثال

(١) ص = ٣س^{٤} + ٤س^{٢} − ٥س + ٣

الحل

ص' = ١٢س^{٣} + ٨س − ٥

مثال

(٢) إذا كان: ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٥س − ٤

فإن ميل المماس للمنحني عند س = ١

الحل

ص' = س + ٥

ميل المماس عند س = ١

د'(١) = ١ + ٥ = ٦

مثال

(٣) إذا كانت: د(س) = $\frac{٣س^{٥}}{٥}$ − $\sqrt{٢}$ س + ٨ فإن د'(٠) = ...

الحل

د(س) = $\frac{٣}{٥}$ س^{٥} − $\sqrt{٢}$ س + ٨

د'(س) = ٣س^{٤} − $\sqrt{٢}$

د'(٠) = ٣(٠)^{٤} − $\sqrt{٢}$ = − $\sqrt{٢}$

حاول ان تحل

(١) د(س) = ٤س^{٣} ← فإن د'(س) = ...

(٢) ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} ← فإن د'(س) = ...

(٣) د(س) = ٣س^{٥} − ٤س^{٢} + $\sqrt[٣]{س}$ ← فإن د'(س) = ...

(٤) إذا كانت: د(س) = ٣أ^{٢} + ٥أ حيث أ ثابت فإن د'(س) = ...

(أ) ٦أ + ٥ (ب) صفر (ج) ٦أ (د) ٥

فنيات قواعد الاشتقاق

① إذا كانت ص = $\frac{م}{س}$ ← فإن ص' = $\frac{-م}{س^{2}}$

① د(س) = $\frac{1}{س}$ ← فإن ص' = $\frac{-1}{س^{2}}$

② د(س) = $\frac{2}{س}$ ← فإن ص' = $\frac{-2}{س^{2}}$

③ د(س) = $\frac{-3}{س}$ ← فإن ص' = $\frac{3}{س^{2}}$

④ د(س) = $\frac{5}{6س}$ ← فإن ص' = $\frac{-5}{6س^{2}}$

---

② إذا كانت ص = $\sqrt[ن]{س^{م}}$ ← فإن ص = $س^{\frac{م}{ن}}$

① ص = $\sqrt{س^{3}}$ ← فإن ص = $س^{\frac{3}{2}}$

② ص = $\sqrt[3]{س}$ ← فإن ص = $س^{\frac{1}{3}}$

③ د(س) = $\sqrt[5]{س^{8}}$ ← فإن ص = $س^{\frac{8}{5}}$

مثال

١ $ص = \sqrt[٣]{س^{٤}}$

الحل

$ص = س^{\frac{٤}{٣}}$

$ص' = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}} = \frac{٤}{٣} \sqrt[٣]{س}$

مثال

٢ $ص = \sqrt[٥]{س^{٨}}$

الحل

$ص = س^{\frac{٨}{٥}}$

$ص' = \frac{٨}{٥} س^{\frac{٣}{٥}} = \frac{٨}{٥} \sqrt[٥]{س^{٣}}$

---

① الضرب

إذا كانت : $ص = د(س) \times ر(س)$

فإن: $ص' = د(س) \times ر'(س) + ر(س) \times د'(س)$

= (الأولي) (مشتقة الثانية) + (الثانية) (مشتقة الأولي)

أمثلة

أوجد المشتقة الاولي

مثـال

① ص = (٣س^{٢} - ٥)(٤س + ٢)

الحـل

ص' = (٣س^{٢} - ٥)(٤) + (٤س + ٢)(٦س)

ص' = ١٢س^{٢} - ٢٠ + ٢٤س^{٢} + ١٢س

ص' = ٣٦س^{٢} + ١٢س - ٢٠

مثـال

② ص = (٣س + ١) (٥ - س^{٢})

الحـل

ص' = (٣س + ١) (-٢س) + (٥ - س^{٢})(٣)

ص' = -٦س^{٢} - ٢س + ١٥ - ٣س^{٢}

ص' = - ٩س^{٢} - ٢س + ١٥

حاول ان تحل

① ص = (س + ١) (س^{٢} + ٣) ← فإن ص' = ...

② ميل المماس لمنحني الدالة ص = (٢س^{٢} + ٤) (٥ + ٣س) عند النقطة (٢ ، ٣) الواقعة عليه

فنيات الضرب

(١) الفرق بين مربعين

* (س - ص)(س + ص) = س^{٢} - ص^{٢}

* (س + ٣)(س - ٣) = س^{٢} - ٩

* $(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})(\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}}) = س - \frac{١}{س}$

أمثلة

أوجد المشتقة الاولي

مثـال

١ ص = (س + ٣) (س - ٣)

الحـل

ص = س^{٢} - ٩ ← ص' = ٢س

مثـال

٢ ص = ($\sqrt{س}$ + ٤)($\sqrt{س}$ - ٤)

الحـل

ص = س - ١٦ ← ص' = ١

مثـال

٣ ص = (س^{٢} - ٣) (س^{٢} + ٣) (س^{٤} + ٩)

الحـل

ص = (س^{٤} - ٩)(س^{٤} + ٩) ← ص = س^{٨} - ٨١

ص' = ٨س^{٧}

---

(٢) ضرب ثلاث أقواس

مثال توضيحي

ص = (س + ١)(س - ٢) (س + ٣) فإن د'(١) = ...

الحـل

ص' = ١ (س - ٢) (س + ٣) + ١ (س + ١) (س + ٣) + ١ (س + ١)(س - ٢)

د' (١) = (-١) × ٤ + ٢ × ٤ + ٢ × (-١) = ٢

② القسمة

إذا كانت : ص = $\frac{د(س)}{ر(س)}$

فإن: ص' = $\frac{ر(س) \times د'(س) - د(س) \times ر'(س)}{(ر(س))^{٢}}$

ص' = $\frac{(\text{المقام}) (\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط}) (\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$

أمثلة أوجد المشتقة الاولي

مثال

① ص = $\frac{س + ١}{س + ٢}$

الحل

ص' = $\frac{(س + ٢)(١) - (س + ١)(١)}{(س + ٢)^{٢}}$

= $\frac{س + ٢ - س - ١}{(س + ٢)^{٢}} = \frac{١}{(س + ٢)^{٢}}$

مثال

② ص = $\frac{٢س^{٢} - ١}{٥س + ٣}$

الحل

ص' = $\frac{(٥س + ٣)(٤س) - (٢س^{٢} - ١)(٥)}{(٥س + ٣)^{٢}}$

= $\frac{٢٠س^{٢} + ١٢س - ١٠س^{٢} + ٥}{(٥س + ٣)^{٢}} = \frac{١٠س^{٢} + ١٢س + ٥}{(٥س + ٣)^{٢}}$

① ص = $\frac{٥س + ١}{٣س - ٤}$ ← فإن ص' = ...

② ص = $\frac{٣س^{٢} - ١}{٥ - ٢س}$ ← فإن د'(١) = ...

فنيات القسمة

إذا كان المقام عنصرواحد ← فإننا نقسم البسط علي هذا المقام

مثال

١ ص = $\frac{س^{٢}+٥}{س}$ فإن ص'=.....

الحل

ص = $\frac{س^{٢}}{س}$ + $\frac{٥}{س}$ = س + $\frac{٥}{س}$

ص' = ١ - $\frac{٥}{س^{٢}}$

مثال

٢ ص = $\frac{س^{٤}-٣س^{٢}+٥س-٦}{س}$ فإن د'(س)=

الحل

ص = $\frac{س^{٤}}{س}$ - $\frac{٣س^{٢}}{س}$ + $\frac{٥س}{س}$ - $\frac{٦}{س}$

ص = س^{٣} - ٣س + ٥ - $\frac{٦}{س}$

ص' = ٣س^{٢} - ٣ + $\frac{٦}{س^{٢}}$

---

(٣) الأقـواس

إذا كانت ص = (د(س))^{ن} ← فإن ص' = ن(د(س)$^{ن-١}$) × د'(س)

ص' = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس

مثال

١ ص = (س + ١)^{٣} فإن: ص'=.....

الحل

ص' = ٣(س + ١)^{٢} × ١

= ٣ (س + ١)^{٢}

مثال

٢ ص = (س^{٢} - ١)^{٧} فإن: ص'=.....

الحل

ص' = ٧(س^{٢} - ١)^{٦} × ٢س

= ١٤س (س^{٢} - ١)^{٦}

مثـــال

③ ص = $(س^{٤} - ٢)^{\frac{٥}{٤}}$ فإن: ص' = ...

الحـــل

$ص' = \frac{٥}{٤}(س^{٤} - ٢)^{\frac{١}{٤}} \times ٤س^{٣}$

$= ٥س^{٣}(س^{٤} - ٢)^{\frac{١}{٤}} = ٥س^{٣}\sqrt[٤]{س^{٤} - ٢}$

ص = $(٣س - ٥)^{٦}$ ← فإن: $\frac{د ص}{د س}$ = ...

حالة خاصة للأقواس

إذا كانت ص = $\sqrt[ن]{س^{م}}$ ← فإن ص = $س^{\frac{م}{ن}}$

مثـــال

① إذا كانت ص = $\sqrt[٣]{(س + ١)}$ فإن ص' = ...

الحـــل

ص = $(س + ١)^{\frac{١}{٣}}$

$ص' = \frac{١}{٣}(س+١)^{\frac{-٢}{٣}} \times ١ = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س + ١)^{٢}}}$

مثـــال

② إذا كانت ص = $\sqrt[٤]{(س^{٢} - ١)^{٥}}$ فإن ص' = ...

الحـــل

ص = $(س^{٢} - ١)^{\frac{٥}{٤}}$

$ص' = \frac{٥}{٤}(س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٤}} \times ٢س$

$= \frac{٥}{٢}س(س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٤}} = \frac{٥}{٢}س\sqrt[٤]{(س^{٢} - ١)}$

ص = $\sqrt[٦]{(س+١)^{٥}}$ فإن ميل المماس للمنحني عند س = ١ هو.....

---

(٤) الجذر التربيعي

إذا كانت ص = $\sqrt{د(س)}$ فإن ص' = $\frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$ = $\frac{\text{مشتقة ماتحت الجذر}}{٢\sqrt{\text{نفسه}}}$

مثال

١ إذا كانت ص = $\sqrt{س^{٢}+١}$ فإن ص' = ...

الحل

ص' = $\frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+١}}$ = $\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$

مثال

٢ إذا كانت ص = $\sqrt{س^{٣}+٨}$ فإن د'(١) = ...

الحل

ص' = $\frac{٣س^{٢}}{٢\sqrt{س^{٣}+٨}}$

د'(١) = $\frac{٣}{٢\sqrt{٩}}$ = $\frac{٣}{٣\times٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ص = $\sqrt{س^{٤}-٣س}$ ← فإن: $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

قاعدة السلسلة

إذا كانت ص = د(ع) ، ع = د(س) ← فإن: $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

مثـــال

إذا كانت ص = ع^{٥} ، ع = س^{٢} − ١ أوجد $\frac{ص}{س}$ عندما س = ٢

الحـــل

$\frac{ص}{ع} = ٥ ع^{٤}$ ، $\frac{ع}{س} = ٢س$

$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$\frac{ص}{س} = ٥ع^{٤} \times ٢س = ١٠ ع^{٤} س$

$\frac{ص}{س} = ١٠ (س^{٢} - ١)^{٤} \times س = ١٠ س (س^{٢} - ١)^{٤}$

د'(٢) = ١٠ × ٢ (٢^{٢} − ١)^{٤} = ٢٠ × ٨١ = ١٦٢٠

حاول ان تحل

إذا كانت ص = ع^{٣} ، ع = س^{٤} − ١ فإن: $\frac{ص}{س}$ عند س = ١