خواطر

في الرياضيات

الصف الثالث الثانوي

التفاضل

إعداد الأستاذ

أسامة سعد الله

ثالثاً : اساسيات حساب المثلثات واشتقاق الدوال المثلثية :

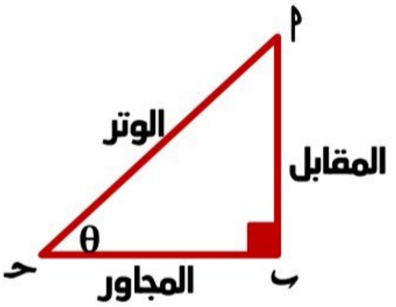
(١) اساسيات حساب المثلثات

① النسب المثلثية الاساسية ومقلوبتها

$\text{حا}\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{\text{ا ب}}{\text{ا ح}} \dashrightarrow \text{قتا}\theta = \dfrac{1}{\text{حا}\theta}$

$\text{حتا}\theta = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{\text{ب ح}}{\text{ا ح}} \dashrightarrow \text{قا}\theta = \dfrac{1}{\text{حتا}\theta}$

$\text{ظا}\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{\text{ا ب}}{\text{ب ح}} \dashrightarrow \text{ظتا}\theta = \dfrac{1}{\text{ظا}\theta}$



(٢) المتطابقات المثلثية

① $\text{حا}^2\theta + \text{حتا}^2\theta = 1$ ومنها

$\text{حا}^2\theta = 1 - \text{حتا}^2\theta$

$\text{حتا}^2\theta = 1 - \text{حا}^2\theta$

② $1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$ ومنها

$\text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta = 1$

$\text{ظا}^2\theta - \text{قا}^2\theta = -1$

$\text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta - 1$

③ $1 + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$ ومنها

$\text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta = 1$

$\text{ظتا}^2\theta - \text{قتا}^2\theta = -1$

$\text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta - 1$

(٣) قوانين مجموع وفرق زاويتان

① $\text{حا}(\text{س} \pm \text{ص}) = \text{حاس حتاص} \pm \text{حتاس حاص}$

② $\text{حتا}(\text{س} \pm \text{ص}) = \text{حتاس حتاص} \mp \text{حاس حاص}$

③ $\text{ظا}(\text{س} \pm \text{ص}) = \dfrac{\text{ظاس} \pm \text{ظاص}}{1 \mp \text{ظاس ظاص}}$

(٤) قوانين ضعف الزاوية

① حا ٢س = ٢ حا س حتا س ومنها ---> حا س حتا س = ١/٢ حا ٢س

② حتا ٢س = حتا² س − حا² س
حتا ٢س = ٢ حتا² س − ١
حتا ٢س = ١ − ٢ حا² س

لاحظ الفرق بين

- حا² س + حتا² س = ١
- حتا² س − حا² س = حتا ٢س
- حا² س − حتا² س = − حتا ٢س

③ ظا ٢س = ٢ ظا س / (١ − ظا² س) = ٢ ظتا س / (ظتا² س − ١)

خد بالك

٢ ظا س / (١ + ظا² س) = حا ٢س

استنتاجات هامة من قانون ضعف الزاوية :

حتا² س = ١/٢ + ١/٢ حتا ٢س

حا² س = ١/٢ − ١/٢ حتا ٢س

(٥) الزوايا المنتسبة

① تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية لتحديد إشارة الدالة المثلثية المعطاه

الربع الأول
- θ - °٩٠
- كل (+)

الربع الثاني
- θ + °٩٠
- θ - °١٨٠
- حا ، قتا (+)

الربع الثالث
- θ + °١٨٠
- θ - °٢٧٠
- ظا ، ظتا (+)

الربع الرابع
- θ + °٢٧٠
- θ - °٣٦٠
- حتا ، قا (+)

°٩٠ ، °١٨٠ ، °٢٧٠ ، °٠ / °٣٦٠

② تحديد الزاوية الربعية

°١٨٠ ، °٣٦٠
لا تغير الدالة

- حا ⟸ حا
- حتا ⟸ حتا
- ظا ⟸ ظا

أي تحافظ علي الدوال المثلثية كما هي

°٩٠ ، °٢٧٠
تغير الدالة

- حا ⟸ حتا
- حتا ⟸ حا
- ظا ⟸ ظتا

أي تضع للدالة (ت)
أو تحذف منها (ت)

③ نحذف الزاوية الربعية ونضع الزاوية فقط

٩٠°

الربع الثاني

حا(١٨٠° − θ) = حا θ
حتا(١٨٠° − θ) = − حتا θ
ظا(١٨٠° − θ) = − ظا θ
قا(١٨٠° − θ) = − قا θ
قتا(١٨٠° − θ) = قتا θ
ظتا(١٨٠° − θ) = − ظتا θ

الربع الأول

صفر° ، ١٨٠°

الربع الثالث

حا(١٨٠° + θ) = − حا θ
حتا(١٨٠° + θ) = − حتا θ
ظا(١٨٠° + θ) = ظا θ
قا(١٨٠° + θ) = − قا θ
قتا(١٨٠° + θ) = − قتا θ
ظتا(١٨٠° + θ) = ظتا θ

الربع الرابع

حا(٣٦٠° − θ) = − حا θ
حتا(٣٦٠° − θ) = حتا θ
ظا(٣٦٠° − θ) = − ظا θ
قا(٣٦٠° − θ) = قا θ
قتا(٣٦٠° − θ) = − قتا θ
ظتا(٣٦٠° − θ) = − ظتا θ

٢٧٠°

٩٠°

الربع الثاني

حا(٩٠° + θ) = حتا θ
حتا(٩٠° + θ) = − حا θ
ظا(٩٠° + θ) = − ظتا θ
قا(٩٠° + θ) = − قتا θ
قتا(٩٠° + θ) = قا θ
ظتا(٩٠° + θ) = − ظا θ

الربع الأول

صفر° ، ١٨٠°

الربع الثالث

حا(٢٧٠° − θ) = − حتا θ
حتا(٢٧٠° − θ) = − حا θ
ظا(٢٧٠° − θ) = ظتا θ
قا(٢٧٠° − θ) = − قتا θ
قتا(٢٧٠° − θ) = − قا θ
ظتا(٢٧٠° − θ) = ظا θ

الربع الرابع

حا(٢٧٠° + θ) = − حتا θ
حتا(٢٧٠° + θ) = حا θ
ظا(٢٧٠° + θ) = − ظتا θ
قا(٢٧٠° + θ) = قتا θ
قتا(٢٧٠° + θ) = − قا θ
ظتا(٢٧٠° + θ) = − ظا θ

٢٧٠°

طريقة الحل

- حدد الربع
- حط الإشارة
- لو الزاوية

°٩٠ ، °٢٧٠
(أشرار)
(لو في (ت) شيلها ولو مافيش حط (ت))

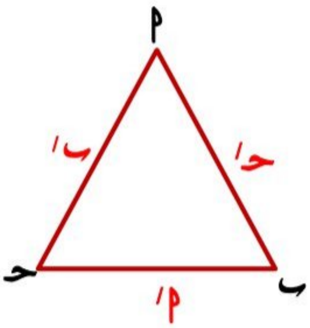
°١٨٠ ، °٣٦٠
(طيبين)
(شيلهم ونزل الدالة زي ماهي)

خدبالك

① حتا(-θ) = حتاθ
② حا(-θ) = -حاθ
③ ظا(-θ) = -ظاθ

(٦) قاعدة الجيب

$$\frac{أ'}{حاأ} = \frac{ب'}{حاب} = \frac{ح'}{حاح} = \frac{\text{محيط } \Delta}{حاأ + حاب + حاح} = ٢نق$$



يستخدم في حالة زاويتان وضلع

(٧) قاعدة جيب التمام

إذا أعطي ضلعان وزاوية محصورة

أ'^٢ = ب'^٢ + حـ'^٢ − ٢ ب' حـ' حتا أ

ب'^٢ = أ'^٢ + حـ'^٢ − ٢ أ' حـ' حتا ب

حـ'^٢ = أ'^٢ + ب'^٢ − ٢ أ' ب' حتا حـ

إذا أعطي ثلاث أضلاع

حتا أ = (ب'^٢ + حـ'^٢ − أ'^٢) / (٢ ب' حـ')

حتا ب = (أ'^٢ + حـ'^٢ − ب'^٢) / (٢ أ' حـ')

حتا حـ = (أ'^٢ + ب'^٢ − حـ'^٢) / (٢ أ' ب')

(ب) اشتقاق الدوال المثلثية :

- إذا كانت ص = حا س ← فإن ص' = حتا س
- إذا كانت ص = حتا س ← فإن ص' = − حا س
- إذا كانت ص = ظا س ← فإن ص' = قا^٢ س

تعميم

الدالة المثلثية	اشتقاقها
حا د(س)	د'(س) حتا د(س)
حتا د(س)	− د'(س) حا د(س)
ظا د(س)	د'(س) قا^٢ د(س)

أمثلة

أوجد المشتقة الاولى

① ص = حا٢س ⟵ ص/ = ٢حتا٢س

② ص = حتا٥س ⟵ ص/ = −٥حا٥س

③ ص = ظا٨س ⟵ ص/ = ٨قا^{٢} ٨س

④ ص = حا(٣س+١) ⟵ ص/ = ٣حتا (٣س+١)

⑤ ص = ٥حتا(٤س−١) ⟵ ص/ = −٢٠حا (٤س−١)

⑥ ص = س^{٣} − ٤س^{٢} + ٢حاس ⟵ ص/ = ٣س^{٢} − ٨س + ٢حتاس

⑦ ص = ٣س^{٤} − $\frac{٥}{س}$ + ٣ظا (٥س) + ٤حتا(٣س−١)

ص/ = ١٢س^{٣} + $\frac{٥}{س^{٢}}$ + ١٥ قا^{٢} (٥س) − ١٢حا(٣س−١)

⑧ ص = حتا^{٢} ٥س + حا^{٢} ٥س

≺ ص = ١ ⟵ ص/ = صفر

⑨ ص = قا^{٢} ٣س − ظا^{٢} ٣س

≺ ص = ١ ⟵ ص/ = صفر

أمثلة

أوجد المشتقة الاولى

مثال

١) $ص = ٢حاس\ حتاس$

الحل

$ص = حا٢س$

$ص^{/} = ٢حتا٢س$

مثال

٢) $ص = حتا^{٢}\ ٥س - حا^{٢}\ ٥س$

الحل

$ص = حتا١٠س$

$ص^{/} = -١٠حا١٠س$

مثال

٣) $ص = \frac{٢ظا٥س}{١ - ظا^{٢}\ ٥س}$

الحل

$ص = ظا١٠س$

$ص^{/} = ١٠قا^{٢}\ ١٠س$

مثال

٤) $ص = ظا(١٨٠ + ٢س)$

الحل

$ص = ظا٢س$

$ص^{/} = ٢قا^{٢}\ ٢س$

مثال

٥) $ص = حا(\frac{\pi}{٢} + ٥س)$

الحل

$ص = حتا٥س$

$ص^{/} = -٥حا٥س$

مثال

٦) إذاكانت $د(س) = س حاس$

فإن $د^{/}(\pi) = ...$

الحل

$د^{/}(س) = س حتاس + حاس$

$د^{/}(\pi) = \pi حتا(١٨٠) + حا(١٨٠)$

$= -\pi + ٠ = -\pi$

حاول ان تحل

أوجد المشتقة الأولي:

① ص = حا٤س + ٣س٢ + ٥

➢ فإن ص/ = ...

② ص = حتا س - ٥حا٦س + س٤ - $\sqrt{س}$

➢ فإن ص/ = ...

③ إذا كانت د(س) = س٢ + حا(٤ - ٢س)

➢ فإن د/(س) = ...

④ ص = س٢ ظا س

➢ فإن ص/ = ...

⑤ ص = ٣ حا٥س - ظا٢س + حتا٤س + ١

➢ فإن ص/ = ...

لاحظ الفرق

⑥ ص = ظا$(\frac{\pi}{٤})$س ← فإن ص/ = ...

⑦ ص = ظا$\frac{\pi}{٤}$ ← فإن ص/ = ...

⑧ ص = ظا$(\frac{\pi}{٤}$س$)$ ← فإن ص/ = ...